电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol. 31 No. 3
Mar. 2003

脉冲噪声环境的一种递归全局最小平均 P-范数算法

常冬霞, 冯大政
(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文给出了适应于α-稳定噪声环境的一种递归全局最小平均 P-范数算法, 其可用于递归计算自适应滤波和系统辨识问题的全局最小平均 P-范数算法. 针对α-稳定噪声的冲击性, 本文所提出的自适应算法采用了有名的 power 迭代法, 并通过计算机仿真比较了有关算法的性能.

关键词: α-稳定噪声; FIR 自适应滤波; 递归全局最小平均 P-范数
中图分类号: TN911.3 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2003) 03-0426-03

An Recursive Total Least Mean P-Norm Algorithm Applied in Alpha-Stable Noise Environments

CHANG Dong-xia, FENG Da-zheng
(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: A recursive total least l_p-norm (RTLMP) algorithm is developed to recursively compute the total least l_p-norm solution for adaptive finite impulse response (FIR) filters. Due to the existence of the non-Gaussian α-stable noise, the performance of signal processing algorithms designed under the Gaussian assumption may degrade seriously. In this paper, a new adaptive algorithm based on the classical power iteration is developed which can minimize the L_p norm of the error function. The performance of the algorithm is evaluated via simulations. It is shown that the new algorithm achieves superior convergence rate.

Key words: alpha-stable noise; adaptive FIR filter; recursive total least l_p-norm

1 引言

自从 α-稳定分布引入信号处理领域以来, 已经出现了多种自适应滤波方法[1,2,5], 所有这些方法都可以归为最小均方 (LMS) 算法. 但是, 由于α-稳定信号不存在有限的二阶和二阶以上的矩[3], 因此这些算法与传统的 LMS 算法并不完全相同, 它们均用最小离差准则代替了传统的 LMS 算法中的最小二乘准则. 所谓的最小离差准则即使误差的 l_p-范数最小, 在最小离差准则下, 很多的学者已经作了许多的研究工作, 但现存的多种算法均存在着无法克服的缺点, 因此, 我们仍需要寻找更好的方法.

本文, 给出了一种类似于递归总体最小二乘 (RTLS) 算法的递归总体最小平均 P-范数 (RTLMP) 算法, 在估计的过程中采用了 power 迭代法, 并应用矩阵求逆引理克服了直接求逆的繁琐计算, 在文章的最后给出了计算机仿真, 显示了该算法性能的优越性.

给定一个具有有限脉冲响应的未知系统, 假设输入和输出皆存在噪声, 则自适应 FIR 滤波依据输入和输出测量值估计的未知系统的脉冲响应如图 1 所示.

假设未知系统的有限脉冲响应是 N ×1 维向量:

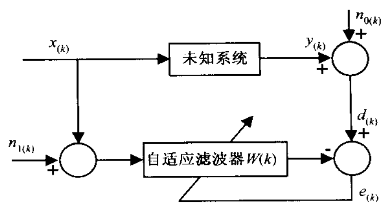

图 1 考虑输入向量噪声 $n_1(k)$ 的脉冲响应估计图

$$h = [h_0, h_1, \cdots, h_{N-1}]^T \tag{1}$$

h 可以是时变的, 但这里假设它为常量, 所谓的"期望"信号由下式给出:

$$d(k) = X^T(k)h + n_0(k) \tag{2}$$

其中, 观测噪声 $n_0(k)$ 是参数为 $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_0, 0, 1)$ 的 α-稳定白噪声, 且与输入向量独立, 输入向量为:

$$X(k) = [x(k), x(k-1), \cdots, x(k-N+1)]^T \tag{3}$$

由于未知系统的输入必须和期望信号一起采样和量化, 因此会产生宽带的量化噪声污染自适应滤波器的输入, 而且外界干扰也会使输入产生噪声. 因此, 这里采用的 FIR 自适应滤波器信号模型更具一般性.

收稿日期: 2001-11-19; 修回日期: 2002-05-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 69972037, 60073038)

2 与 FIR 自适应滤波相关的全局最小 l_p-范数问题

考虑下面的 FIR 系统辨识问题,设有个含有噪声的独立变量:

$$\mathrm{r}(k) = [x(k) + n_1(k), x(k-1) + n_1(k-1), \cdots, x(k-N+1) + n_1(k-N+1)]^T \tag{4}$$

其中:$n_1(k)$是离差为 γ_1 的 $S(\alpha_1)S$ 稳定噪声,且有一个含有噪声的非独立变量 $d(k)$. 因此,k 时刻的$(N+1)$维增广观测数据向量为:

$$\bar{\mathrm{r}}(k) = [\mathrm{r}(k), d(k)]^T \tag{5}$$

$$\mathrm{h}(k) = [h_0, h_1, \cdots, h_{N-1}]^T \tag{6}$$

是待寻找的递归参数. 定义$(N+1)$维的扩展向量:

$$\bar{\mathrm{w}} = [\mathrm{w}, w_N]^T \tag{7}$$

其中:$\mathrm{w} = [w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]^T$,则 FIR 模型的系统辨识问题可以表示为:

$$\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, L \tag{8}$$

TLMP 解源于如下优化问题:

$$\bar{\mathrm{w}} = \arg\min_{\bar{\mathrm{w}}} E\left\{\frac{|\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)|^p}{\|\bar{T}\bar{\mathrm{w}}\|^p_{\frac{p}{p+1}}}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{w}_{TLMP} \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\bar{\mathrm{w}}}{w_N} \tag{10}$$

其中:$\bar{\mathrm{w}}$ 是$(N+1)$维递归参数矢量,$\bar{T}$ 为加权矩阵,对应于不同的加权矩阵可得到不同的算法[6],本文取为:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathbf{0} & \beta \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中:I 是 $N \times N$ 维单位矩阵,$\beta = \alpha_0/\alpha_1$ 即 β 是与输入和输出噪声相关的常数,当噪声的参数先验未知时,通常可简单的取为 $\beta = 1$.

我们可以将问题(9)等价为下面的极值化问题:

$$\bar{\mathrm{w}} = \arg\min_{\bar{\mathrm{w}}} E\{|\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)|^p\}$$
$$\text{s.t.} \quad \|\bar{\mathrm{w}}\|_{\frac{p}{p-1}} = \delta \tag{12}$$

其中 δ 为任意常数,取期望估计为仅依赖于当前时刻数据的无记忆估计 $E[\circledR] = [\circledR]$,则问题(12)可简化为:

$$\bar{\mathrm{w}} = \arg\min_{\bar{\mathrm{w}}} |\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)|^p \tag{13}$$

$$\|\bar{\mathrm{w}}\|_{\frac{p}{p-1}} = \delta \tag{14}$$

为了得到所需要的自适应算法,可以引入确定性目标函数:

$$J(n) = \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}|e(k)|^p = \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}|\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)|^p \tag{15}$$

上式可变为:

$$J(n) = \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}|\bar{\mathrm{w}}^T\mathrm{r}(k)|^{p-2}\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)\bar{\mathrm{r}}^T(k)\bar{\mathrm{w}}^T$$
$$= \bar{\mathrm{w}}^T\sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}u(k)\bar{\mathrm{r}}(k)\bar{\mathrm{r}}^T(k)\bar{\mathrm{w}} = \overline{\mathrm{w}\mathrm{R}}(n)\bar{\mathrm{w}}$$

其中:

$$u(k) = |\bar{\mathrm{w}}^T\bar{\mathrm{r}}(k)|^{p-2}$$

$$\bar{\mathrm{R}}(n) = \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}u(k)\bar{\mathrm{r}}(k)\bar{\mathrm{r}}^T(k) \tag{16}$$

为了追踪系统的非平稳性我们可将式(16)表示为递推形式,即:

$$\bar{\mathrm{R}}(n) = \lambda\bar{\mathrm{R}}(n-1) + u(n)\bar{\mathrm{r}}(n)\bar{\mathrm{r}}^T(n) \tag{17}$$

其中 λ 为遗忘因子,它使得新到的数据较之旧数据更为重要,这里是 $0 \le \lambda \le 1$ 常数,它决定算法的有效记忆长度. 当 $\lambda = 1$ 时,算法具有无限长记忆. 当 $\lambda < 1$ 时,算法的有效记忆长度为 $m = -1/\log\lambda \cong 1/(1-\lambda)$ 个数据点. 为了说明这一情况,我们可以暂时考虑$|e(k)|^p = 1$ 的情形. 则

$$J(n) = \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k} = (1-\lambda^{n+1})/(1-\lambda)$$

我们定义有效记忆长度为 $n+1 = m$, m 必须满足 $J(m)/J(\infty) \approx 0.9$. 这样,$1-\lambda^m = 0.9$. 当 λ 非常接近于 1 时,$\log\lambda \approx \lambda - 1$. 通常在具体的算法中可据经验对 λ 进行赋值. 为了求得 $\bar{\mathrm{w}}_{opt}$ 采用 power 迭代法[4],即:

$$\bar{\mathrm{w}}(n+1) = \bar{\mathrm{R}}^{-1}(n+1)\bar{\mathrm{w}}(n)$$

这样我们就需要对广义相关矩阵 $\bar{\mathrm{R}}(n)$ 求逆,通常我们并不采用先求 $\bar{\mathrm{R}}(n)$ 然后再求逆的方法,而是应用矩阵求逆引理直接求得 $\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n)$. 对式(17)应用矩阵求逆引理可得:

$$\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda}\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n-01)$$
$$-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n-1)u(n)\bar{\mathrm{r}}(n)\bar{\mathrm{r}}^T(n)\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n-1)}{\lambda + u(n)\bar{\mathrm{r}}^T(n)\bar{\mathrm{R}}^{-1}(n-1)\bar{\mathrm{r}}(n)} \tag{18}$$

为了方便可以令:

$$\mathrm{P}(n) = \bar{\mathrm{R}}^{-1}(n)$$
$$a(n) = \lambda + u(n)\bar{\mathrm{r}}^T(n)\mathrm{P}(n-1)\bar{\mathrm{r}}(n)$$
$$\mathrm{g}(n) = \frac{1}{a(n)}\mathrm{P}(n-1)\bar{\mathrm{r}}(n)$$

则式(18)可写为:

$$\mathrm{P}(n) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}(n-1) - \frac{1}{\lambda}u(n)^{p-2}\mathrm{g}(n)\bar{\mathrm{r}}(n)^T\mathrm{P}(n) \tag{19}$$

又由约束条件式(12)可知,在每次迭代过程中权向量保持 $\frac{p}{p-1}$ 范数不变,所以

$$\bar{\mathrm{w}}(n) = \bar{\mathrm{w}}(n)/\|\bar{\mathrm{w}}(n)\|_{\frac{p}{p-1}}$$

这样我们就可以给出 RTLMP 算法的紧凑形式.

算法 1(RTLMP 算法)

初始化:$\bar{\mathrm{w}}(0) = [\mathrm{O}, -1]^T$,其中 O 为 $1 \times N$ 维行向量,

$\mathrm{P}(0) = \delta^{-1}\mathrm{I}$,其中 δ 为很小的正数,

For $k = 1$ to L

$$u(k) = |\bar{\mathrm{w}}^T(k)\bar{\mathrm{r}}(k)|^{p-2}$$
$$a(k) = \lambda + u(k)\bar{\mathrm{r}}^T(k)\mathrm{P}(k-1)\bar{\mathrm{r}}(k)$$
$$\mathrm{g}(k) = \frac{1}{a(k)}\mathrm{P}(k-1)\bar{\mathrm{r}}(k)$$
$$\mathrm{P}(k) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}(k-1) - \frac{1}{\lambda}u(k)\mathrm{g}(k)\bar{\mathrm{r}}(k)\mathrm{P}(k-1)$$
$$\bar{\mathrm{w}}(k) = \mathrm{P}(k)\bar{\mathrm{w}}(k-1)$$
$$\bar{\mathrm{w}}(k) = \bar{\mathrm{w}}(k)/\|\bar{\mathrm{w}}(k)\|_{\frac{p}{p-1}}$$
$$\bar{\mathrm{w}}(k) = -[w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]/w_N$$

其中 w_i, $i = 0, 1, \cdots, N-1$ 为 $\bar{\mathrm{w}}$ 的元素.

3 仿真结果

为了比较 RTLMP 和 RLMP 自适应算法的性能,考虑脉冲

响应为:

$$h = [-0.3, -0.9, 0.8, -0.7, 0.6]^T \tag{20}$$

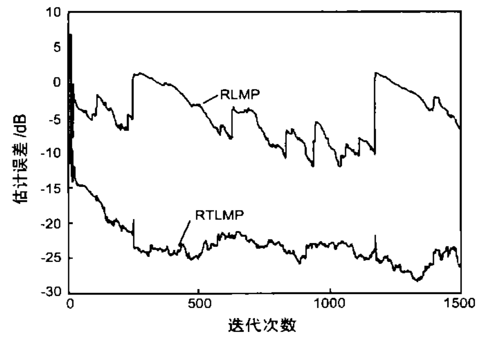

图 2 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1.2$, $p = 1.18$,两种自适应算法的性能比较

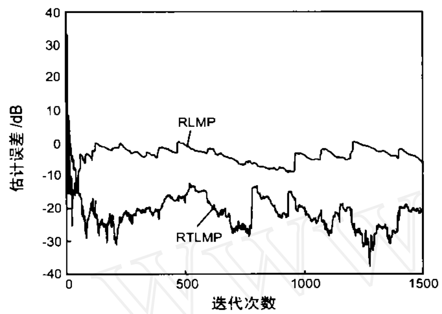

图 3 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1.5$, $p = 1.45$,两种自适应算法的性能比较

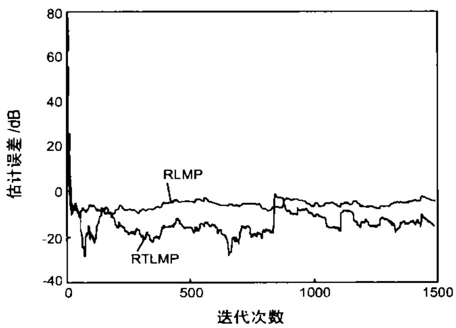

图 4 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1.8$, $p = 1.76$,两种自适应算法的性能比较

的未知系统.系统由高斯白噪声激励,输入噪声和输出噪声分别是特征指数 α_0 和 α_1 且离差 $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ 的对称 α-稳定分布噪声.如图 1 所示,估计均方误差定义为:

$$E(n) = 20\log10 \| w(n) - h \|_2$$

其中 $w(n)$ 是脉冲响应的估计.分别给出了在相同信噪比和不同特征指数情况下的误差曲线图,仿真中均取 $SNR = 5$dB.

通过仿真可以看出 RTLMP 算法的性能较 RLMP 算法的性能有了一定的提高,同时随着特征指数的增大,两种自适应算法的性能将越来越接近.本文只对 RTLMP 算法进行了初步的研究,对于递归总体最小 P-范数估计子的性质仍有待进一步研究.

参考文献:

[1] C L Nikias, M Shao. Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications[M]. New York: Wiley, 1995.

[2] O Arikan, M Belge, E Cetin, E Erzin. Adaptive filtering approaches for non-gaussian stable process [A]. Proc ICASSP '95 [C]. New York: IEEE, 1995, 2. 1400 - 1403.

[3] M Shao, C L Nikias. Signal processing with fractional lower order moments: Stable process and their application [J]. Proc IEEE, July, 1993, 81(7): 986 - 1009.

[4] R Vaccaro. On adaptive implementations of Pisarenko 's harmonic retrieval [A]. Proc ICASSP '85 [C]. New York: IEEE, March 1984. 6. 1.1 - 6.1.4.

[5] S Haykin. Adaptive Filter Theory (2nd ed) [M]. New York: Prentice Hall, 1996.

[6] C E Davila. An Efficient Recursive Total Least Squares Algorithm for FIR Adaptive Filtering [J]. IEEE Trans Signal Processing, Feb 1994, 42(2): 268 - 280.

作者简介:

常冬霞 女,1977 年 12 月出生于河北衡水,西安电子科技大学硕士研究生,主要研究方向为自适应信号处理.

冯大政 男,1959 年 12 月出生于陕西紫阳,博士,现为西安电子科技大学教授,博士生导师,主要研究方向有:信号处理,智能信号处理和雷达成像.